BEMERKUNGEN ZUR DEFINITION VON π UND ZU EINSCHLÄGIGEN BERECHNUNGSVERFAHREN.

Während die fundamental wichtigen Zahlen e und i selbst für die Schulmathematik auf einem relativ hohen Exaktheisniveau zugänglich geworden sind, gilt eine solche Aussage nur mit starken Einschränkungen für die Kreiszahl π und dem damit assoziierten Winkelbegriff. Die Entwicklung dieser Begriffe auf dem einzig sinnvollen operativen Niveau stellt die Schulmathematik bis heute vor das schier unlösbare Problem, die Resultate und den systematischen Aufbau des Riemann-Integrals vorwegnehmen zu müssen. Ferner ergeben sich aufgrund der einschlägigen fachlichen und fachdidaktischen Forschung laufend neue Erkenntnisse über Eigenschaften von π, die besonders im Zusammenhang mit dem durch den Rechnereinsatz ausgelösten Entwicklungsschub auch für die Mathematik der Schule von Interesse sind (siehe z.B. [A]).

Wer sich in ziemlich umfassender Weise über π informieren will, sei auf das sehr gut lesbare Buch von G.I. Drinfeld [D] bzw. auf C.L. Siegel [S] hingewiesen. Im Folgenden soll versucht werden, einige neuere Perspektiven des Problems herauszuarbeiten.

§ 1. Die "effizienteste" Definition

Setzt man elementare Kenntnisse über reelle Potenzreihen voraus, insbesondere die Möglichkeit der gliedweisen Differentiation und Integration, so empfehlen sich die Definitionen

$$\sin x := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} .$$

Aus dem Quotientenkriterium ergibt sich, daß beide Reihen für alle x konvergieren. Sofort sieht man, daß

$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x, \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$
$$\text{und } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Da $(\sin^2 x + \cos^2 x)' = 0 \ (\forall x)$, folgt $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 1 \ (\forall x)$ und daraus $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$. Setzt man, für fixes $y \in \mathbb{R}$,

$$u_y(x) := \sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$v_y(x) := \cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

so zeigt eine elementare, aber längere Rechnung, daß

$$(u_y^2(x) + v_y^2(x))' = 0 \ (\forall x),$$

so daß

$$u_y^2(x) + v_y^2(x) = \text{const.} = u_y^2(0) + v_y^2(0) = 0.$$

Daraus folgt, für alle x und y, $u_y(x) = 0$ und $v_y(x) = 0$, also die Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Zur Definiton von π führt nun der folgende Satz.

<u>SATZ A</u> Im offenen Intervall $]0,2[$ existiert genau eine Nullstelle von $y = \cos x$.

<u>BW</u> Auf $]0,2[$ ist $\sin x > 0$, weil $\sin x = (x - \frac{x^3}{3!}) + (\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}) + \dots$. Daher ist cos x monoton fallend, weil $\cos' x = -\sin x$. Es ist $\cos 1 > 0$ und $\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - (\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}) - (\dots) - \dots \quad 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} < 0$ Daher existiert nach Bolzano eine Nullstelle; wegen der Monotonie von cos auf $]0,2[$ ist sie eindeutig bestimmt.

<u>DN</u> $\frac{\pi}{2} :=$ Nullstelle von $y = \cos x$ auf $]0,2[$.

Es gilt $1 < \frac{\pi}{2} < 2$, also $2 < \pi < 4$. Aus der obigen Definition läßt sich diese Nullstelle $\frac{\pi}{2}$ numerisch rasch berechnen. Es gilt also $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und daher $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Aus den Additionstheoremen folgt nun

$$\sin(x + \tfrac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \cos(x + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin x$$

und daraus

$$\sin(x + \pi) = \sin((x + \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}) = -\sin x,$$
$$\cos(x + \pi) = \cos((x + \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2}) = -\cos x,$$

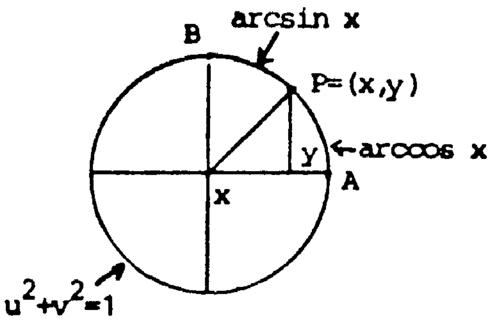
so daß

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Somit hat man alle "üblichen" Formeln und Eigenschaften von sin und cos erhalten und kann die Graphen dieser Funktionen, sowie die von $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$, $\text{ctn}\, x := \frac{\cos x}{\sin x}$ etc. zeichnen. Als Umkehrfunktion der eben definierten erhält man auf den üblicherweise gewählten Intervallen nun arcsin, arccos, arctan, arcctn etc..

Bis hierher ist weder von Winkeln noch von Kreisen oder Kreisteilen die Rede gewesen; alles hat sich im Rahmen der reellen Analysis (Potenzreihen) abgespielt!

Noch ausständig ist die Herleitung der Beziehungen dieser Begriffe zur Geometrie des Kreises. Nach Definition der Bogenlänge ist die Länge des nebenstehend skizzieren Kreisbogens $\overset{\frown}{BP}$ gegeben durch



$$\widehat{BP}: = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_0^x = \arcsin x.$$

Da $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ (siehe oben!) existiert also auch das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ und hat den Wert $\widehat{BA} = \frac{\pi}{2}$.

Aus $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ folgt sofort, daß $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ (für $-1 \leq x \leq 1$), so daß $\widehat{PA} = \arccos x$ (siehe Skizze). Erst jetzt gelingt die Definition des Winkels.

DN (1) $\alpha: = \arccos x$ $(-1 \leq x \leq 1,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 = 1;$ d. h. $\pi \geq \alpha \geq 0)$

(2) $\alpha: = 2\pi - \arccos x$ $(-1 \leq x \leq 1,\ y \leq 0,\ x^2+y^2 = 1$

; d.h. $\pi \leq \alpha \leq 2\pi)$.

In beiden Fällen folgt sofort $x = \cos \alpha$ und $y = \sin \alpha$ für $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, und α ist somit die übliche Bogenlänge $\widehat{PA}$ auf dem Einheitskreis.

§ 2. Ein gangbarer Weg

Neben vielen anderen hat sich der Funktionentheoretiker L. Bers [B] mit dem Thema beschäftigt und hat die folgende Darstellung gegeben, die hier vereinfacht präsentiert wird.

DN π: = Fläche des Kreises vom Radius 1.

Wegen der Symmetrie der Kreislinie in bezug auf die x-Achse braucht man also nur den Begriff der "Fläche unter einer stetigen Kurve" zu bemühen; grundsätzlich ist für die Flächenberechnung ja das 2-dimensionale Riemann-Integral anzuwenden.

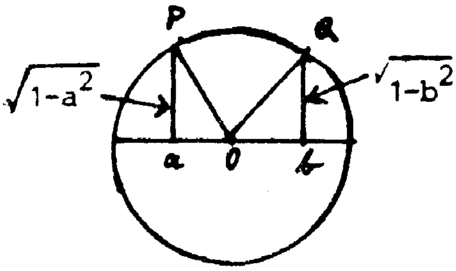
Die obige Definition läßt sich in der Form

$\pi := 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ schreiben und ist numerisch besonders mit dem Rechner leicht auswertbar. Damit steht aber π (noch) nicht als Bogen bzw. Winkelmaß zur Verfügung und selbst die Herleitung von $\sin' x = \cos x$ stößt auf unüberwindliche Schwierigkeiten, weil sie die Berechnung von $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ voraussetzt. Also leitet Bers das folgende Resultat her.

Satz B Die Fläche eines Kreissektors vom Radius 1 ist gleich der halben Länge seines Bogens.

Hier sind sowohl "Bogen" als auch "Fläche" bereits als durch die Integral-Definition gegeben vorausgesetzt, aber es wird nicht die Theorie der Potenzreihen verwendet.

Die Idee des Beweises soll hier kurz angedeutet werden. Aus der nebenstehenden Skizze folgt aus der Definition der Bogenlänge, daß für $-1<a\leq b<1$,



$$\overset{\frown}{PQ} := \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Da aber für $0\leq x<1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\;\frac{1}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$ und da

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} (1-x)^{-1/2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{\varepsilon} =$$

existiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Also ist die Sektorfläche POQ für $-1\leq a\leq b\leq 1$ gegeben durch

$$H_a(b) := \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx + \frac{a}{2}\sqrt{1-a^2} - \frac{b}{2}\sqrt{1-b^2}$$

und es ist zu zeigen, daß

$$(1) \quad H_a(b) - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Diese Verifikation wird mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Differential- u. Integralrechnung erbracht, indem gezeigt wird, daß die linke Seite von (1), als Funktion von b aufgefaßt, die Ableitung 0 hat, so daß sie konstant gleich 0 ist. Allein schon der Verzicht auf Potenzreihen schafft also starke mathematische Komplikationen. Das sollte dem Leser zu denken geben und ihn insbesondere in der Richtung der Einsicht sensibilisieren, daß selbst die gängigsten Lehrbücher einer sachgerechten Darstellung dieser Problematik doch eher ausweichen. Wenn z.B. das Auftragen eines Maßstabes von 0° bis

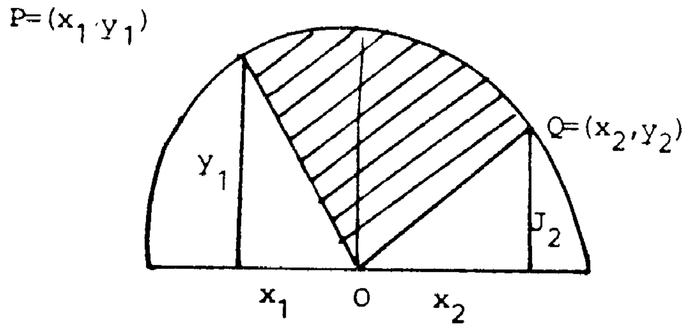
bis 90° auf den Viertelkreis empfohlen sind, so handelt es sich eben genau um die Behauptung der Existenz des oben erwähnten uneigentlichen Riemann-Integrals oder einer äquivalenten, nur durch Infinitesinalprozesse zu definierenden Größe. Es soll hier aber keineswegs gegen den sehr notwendigen Versuch polemisiert werden, auf einem gewissen Exaktheitsniveau zu "deduzieren", wohl aber gegen die Annahme, die gängigen Darstellungen seien "im wesentlichen" exakt.

§ 3 Eine wesentliche Abkürzung

Kombiniert man die Darstellung von L. Bers (§ 2) mit einer Bemerkung von E.F. Assmus Jr. [AS], so ergibt sich eine Herleitung der Definition von π und der Kreisteile, die zumindest im Rahmen des Lehrstoffes der gymnasialen Oberstufe erarbeitet werden kann, da sie allein auf dem Fundamentalsatz und der daraus abgeleiteten Methode der partiellen Integration beruht.

BW von Satz B (verkürzt):

Sei $y = \sqrt{1-x^2}$. Dann ist



$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-x^2}\, dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= [xy]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= [xy]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1-x^2}\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ so daß}$$

$$(2) \quad \int_{x_1}^{x_2} y\, dx - \frac{1}{2}\, [xy]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Die linke Seite von (2) stellt aber die Fläche des Sektors OQP dar, die rechte Seite die halbe Länge des Bogens $\widehat{PQ}$. Wegen der im § 2 gemachten Abschätzung gilt die Formel auch für $P = (-1,0)$ bzw. $Q = (1,0)$.

Aus den üblichen Eigenschaften des Riemann-Integrals und der Symmetrie des Integranden $y = \sqrt{1-x^2}$ folgt sofort, daß der Umfang des Kreises vom Radius r gleich ist $2r\pi$, wo π (siehe § 2) als Fläche des Einheitskreises definiert ist. Wählt man diese Methode der Einführung von π bzw. des Bogenmaßes, so können die trigonometrischen Funktionen sin und cos über ihre Umkehrfunktionen arcsin und arccos, wie folgt definiert werden.

DN Für $-1 \leq x \leq 1$ sei $\arccos x := \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Dann ist $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, für $-1<x<1$, also arccos x fallend und zu $y = \arccos x$ existiert die stetig differenzierbare Umkehrfunktion $x = \cos y$ bzw. $y = \cos x$ auf dem Intervall $[0,\pi]$ die durch die Definition $\cos(x+\pi) := -\cos x$ auf $[0,2\pi]$ ausgedehnt werden kann. Im Anschluß daran kann man die trigonometrischen Funktionen einführen.

Zusammenfassend kann noch gesagt werden, daß der essentielle Zusammenhang zwischen den Begriffen "Winkelmaß", "Fläche" und "trigonometrischen Funktionen" durch Satz B beschrieben ist, so daß für eine zumindest später (auf Universitätsniveau) exaktifizierbare Darstellung die folgenden mathematischen Hilfsmittel als unvermeidbar erscheinen.

(1) Begriff des Riemann-Integrals (einschließlich Existenz);
(2) Begriff der Bogenlänge, durch ein Riemann-Integral definiert;
(3) Fundamentalsatz;
(4) Sätze über Umkehrfunktionen.

Aufgrund dieser Analysen wird es dem Leser wohl nicht allzu schwer fallen, der These zuzustimmen, daß hier ein bis heute unbewältigtes (und vielleich nicht bewältigbares) Problem der Schulmathematik vorliegt!

§ 4 π als Grenzwert von Folgen und Reihen

Wiewohl es um die Einführung der Zahl π, wie § 1 - § 3 zeigen, nicht zum besten bestellt ist, existieren doch eine Reihe vom Methoden zur Berechnung von π, die zum Teil seit Jahrhunderten bekannt sind; und andererseits ergeben sich aufgrund der Möglichkeit des Rechnereinsatzes im Unterricht heute Berechnungsmethoden auf der Grundlage von Rekursionsformeln, die sehr effizient sind und die Zahl "faßbar" machen.

Die folgenden Darstellungen von π sind klassisch, sie finden sich - mit Herleitungen - z.B. in [D] bzw. in [H].

(1) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, \ldots$ (Leibniz-Reihe)

(2) $\pi = 4(4\alpha-\beta)$, wo $\alpha := \arctan \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{3.5^3} -$

$\beta := \arctan \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} \ldots$

(3) $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2k}{2k-1}\,\frac{2k}{2k+1}$ (Wallis'sche Formel)

(4) $\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+}}}}$ (Kettenbruch von Brouncker)

Mit Hilfe der schnell konvergierenden Reihe (2) bzw. einer Modifikation davon ist π in [B-W] auf 100 000 Stellen berechnet worden. Die ersten 255 Stellen dieser Entwicklung sind:

π = 3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974
944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306
647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128 481 117 450 284 102 701 938 521 105
559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475 648 233 786 783
165 271 201 909 145 648]

Als transzendente Zahl (Lindemann, 1882) hat π eine nicht-periodische unendliche Kettenbruchentwicklung. Wählt man für π die (grobe) dekadische Näherung $\pi \approx 3.14$, so ergibt sich $\pi \approx 3 + \frac{14}{100} = 3 + \frac{1}{50/7} = 3 + \frac{1}{7+1/7} =$ $= [3;\ 7,\ 1]$. Bei Verwendung von $\pi \approx 3.142$ hingegen ergibt sich $\pi \approx [3;7,23,1,1]$ Welche Stellen in diesen beiden Entwicklungen für die Entwicklung von π wirklich gültig sind, ergibt sich aus einem Satz von O. Perron [P]: falls die irrationale Zahl ξ zwischen den rationalen Zahlen a und b liegt, $a<\xi<b$, sind jene Stellen, in denen die Kettenbruchentwicklungen von a und b übereinstimmen, auch gültig für die Entwicklung von π; im obigen Beispiel also $[3;7,...]$.

Mit Hilfe eines Basic-Programms für 255-stellige Arithmetik auf einem Honeywell-Bull-Micral 30 [G-H] haben H. Rupprecht und der Autor die folgenden 239 gültigen Stellen der Kettenbruchentwicklung von π ermittelt (vgl. z.B. [H-S]).

π: [3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6,99,1,2,
2,6,3,5,1,1,6,8,1,7,1,2,3,7,1,2,1,1,12,1,1,1,3,1,1,8,1,1,2,1,6,1,1,5,2,2,3,1,2,4
,4,16,1,161,45,1,22,1,2,2,1,4,1,2,24,1,2,1,3,1,2,1,1,10,2,5,4,1,2,2,8,1,5,2,2,26
,1,4,1,1,8,2,42,2,1,7,3,3,1,1,7,2,4,9,7,2,3,1,57,1,18,1,9,19,1,2,18,1,3,7,30,1,1
,1,3,3,3,1,2,8,1,1,2,1,15,1,2,13,1,2,1,4,1,12,1,1,3,3,28,1,10,3,2,20,1,1,1,1,4,1
,1,1,5,3,2,1,6,1,4,1,120,2,1,1,3,1,23,1,15,1,3,7,1,16,1,2,1,21,2,1,1,2,9,1,6,4,1
27,14,5,1,3,13,7,9,1,1,1,1,1,5,4,1,1,3,...]

Anschließend soll eine Folge mit einem besonders einfachen rekurrenten Bildungsgesetz beschrieben werden, die auch im Unterricht verwendet werden kann. Anstoß zu dieser Untersuchung gab eine sehr detaillierte Frage von J. Laub an den Autor.

Sei $x_1 := 1$, $x_{k+1} := x_k + \sqrt{1+x_k^2}$. Dann ist $\{x_k\}$ eine monoton steigende Folge und $x_{k+1} > 2x_k$, so daß $\lim_k x_k = +\infty$.

Sei $y_k := 2^{k+1}/x_k$, also $y_1 = 4$, $y_2 = 3.2$ etc.; die Folge $\{y_k\}$ genügt der Rekursionsformel

$$y_{k+1} = \frac{2^{k+2} y_k}{2^{k+1} + \sqrt{4^{k+1} + y_k^2}} ,$$

wie man sofort nachrechnet.

SATZ C Es gilt $\pi = \lim_k y_k$ mit der Fehlerabschätzungsformel

$$y_k - \pi < 4^{-(k-4)}.$$

BW Zunächst gilt $y_{k+1} = 2^{k+2}/x_{k+1} < 2^{k+2}/2x_k = 2^{k+1}/x_k = y_k$; also ist (y_k) eine monoton fallende Folge von positiven Zahlen, so daß $a := \lim_k y_k$ existiert. Es ist zu zeigen, daß $a = \pi$. Zunächst sieht man leicht, daß $x_k = \cot(\pi/2^{k+1})$. Für k=1 gilt $1 = \cot(\pi/4)$; also ist, per inductionem,

$$\cot(\pi/2^{k+1}) + \sqrt{1+\cot^2(\pi/2^{k+1})} = \frac{\cos(\pi/2^{k+1})+1}{\sin(\pi/2^{k+1})} =$$

$$= \frac{2\cos^2(\pi/2^{k+2})}{2\sin(\pi/2^{k+2})\cos(\pi/2^{k+2})} = \cot(\pi/2^{k+2}) = x_{k+1}.$$

Daher gilt $y_k = 2^{k+1}\tan(\pi/2^{k+1}) = \pi \dfrac{\tan(\pi/2^{k+1})}{(\pi/2^{k+1})}$, so daß

$\lim_k y_k = \pi$, weil $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.

Schließlich ist

$$y_k - \pi = 2^{k+1}\tan(\pi/2^{k+1}) - \pi =$$

$$= 2^{k+1}[\tan 0 + \tan' 0(\pi/2^{k+1}) + \frac{\tan'' 0}{2}(\pi/2^{k+1})^2 + \frac{\tan'''(\Theta)}{6}(\pi/2^{k+1})^3] - \pi,$$

wo $0<\Theta<\pi/2^{k+1}$. Direkt Berechnung der Ableitungen ergibt

$$y_k - \pi = 2^{k+1}\,\frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{2^{3k+3}}\cdot\frac{\cos^4\theta+3\sin^2\theta\cos^2\theta}{2\cos^6\theta}$$

D Θ nahe 0 ist, kann $\cos\Theta > \frac{1}{2}$ genommen werden. Das ergibt

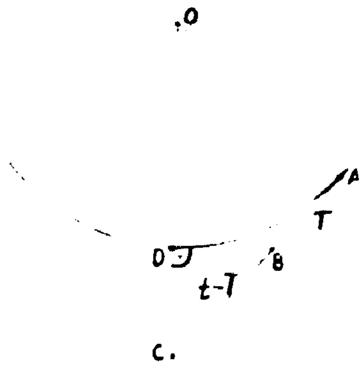
$$y_k - \pi < \frac{32.\pi^3}{6.4^k} < 4^{-(k-4)}.$$

Mit Hilfe eines Taschenrechners - etwa eines Sharp 1401 - erhält man schon nach 18 Schritten π auf 10 Stellen genau. Will man - von Problemen der Rechengenauigkeit abgesehen - π mit Hilfe dieser Folge auf 1 Dezimalstellen (mit Rundung) genau berechnen, so genügt es also, $4^{-(k-4)} < 5.10^{-(1+1)}$, also $k>4 + \frac{1+1-\log 5}{\log 4}$ zu wählen.

Für den Beweis von Satz C haben wir wieder trigonometrische Funktionen und ihre Grenzwerteigenschaften und Identitäten verwendet. Das würde den Wert einer so einfachen Formel für π (für den Schulgebrauch) stark mindern. Untersucht man jedoch die Rekursionsformel näher, so erkennt man, daß es sich um eine Formel handelt, die auch unmittelbar aus der Geometrie des Kreises einsichtig ist. Denn wird dem Einheitskreis ein regelmäßiges 2^{k+1}- Eck mit Umfang $U(2^{k+1})$ umgeschrieben, so ist sein halber Umfang gleich $2^k.2.\ \tan(2\pi/2^{k+1}.2) = 2^{k+1}\ \tan(\pi/2^{k+1}) = y_k$ d.h. $y_k = \frac{1}{2}\ .\ U(2^{k+1})$, so daß klarerweise $\lim y_k = \pi$ gelten muß. Daß aber die Folge $\{y_k\}$ ihre charakteristische Rekursionsrelation erfüllt, ist mit den Mitteln der Ähnlichkeitsgeometrie (ohne Analysis, ohne Winkelfunktionen!) deduzierbar. Hier sei der Leser auf die schöne Arbeit von J. Amstler [ ] hingewiesen, in der andere Zusammenhänge dieser Art, und Zusammenhänge mit der Bildung iterierter Mittel dargestellt sind.

Im Anschluß an eine Diskussion der obigen Überlegungen hat J. Laub dem Autor die folgende Deduktion der Konvergenz der obigen Folge übermittelt, die wegen ihres elementaren Charakters besonders empfehlenswert ist.

In der nebenstehenden Skizze bezeichnet t bzw T die Seite des dem Einheitskreis umschriebenen n-Ecks bzw. 2n-Ecks. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke OCA und CBD gilt



$$(t-T)/T = \sqrt{1+t^2}/1.$$

Sei $x_n := 1/t$, $x_{n+1} := 1/T$. Dann folgt aus der letzten Relation sofort die Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^{\,2}}$$

Damit schließt sich der Kreis dieser Betrachtungen; denn wendet man diese Relation auf das 2^k-Eck und das 2^{k+1}-Eck an, so erhält man die Folge $\{y_k\}$, die oben betrachtet wurde. Für die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit scheinen die obigen Überlegungen aber nicht ersetzbar zu sein.

LITERATUR

[A] J. Amstler, Verschiedene Mittelwerte aus zwei Zahlen und Iteration der Mittelwertbildung, Institut für Mathematik der Universität Linz, 1983.

[AS] E.F.Assmus, JR., Pi, The American Mathematical Monthly 92, 213-214, 1985.

[B] L.Bers, Calculus, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969.

[D] G.I.Drinfeld, Quadratur des Kreises und Transzendenz von π, Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin, 1980.

[G-R] S. Grosser und H. Rupprecht, Basic-Programme für Schule und Univeristät, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1986(erscheint demnächst).

[H] T. Huber, Die Kreiszahl π, Dipl. Arbeit am Inst.f.Math.d. Universität Wien.

[H-S] E. Hlawka u. J. Schoissengeier, Zahlentheorie-Einführung, Manz Verlag, Wien 1979.

[P] O.Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, B.G.Teubner, Leipzig 1954.

[S] C.L.Siegel Transzendente Zahlen, B.I. Hochschultaschenbuch 137. Bibliogr.Inst.Mannheim 1967

[S-W] P. Shanks u. J. Wrench Jr., Calculation of π to 100000 Decimals, Mathematics of Computation XVI, 77-80, 1962.